Rafinări ale inegalității lui Bergström.Aplicații.

de Ion Bursuc şi Daniela Macovei

Motto:*Dacă rămâneți întru Mine şi cuvintele Mele rămân în voi,cereți ceea ce voiți şi se va da vouă(IOAN,cap.15,v.7)*

Următoarea inegalitate este cunoscută sub denumirea de „Inegalitatea lui Bergström”

Inegalitatea lui Bergström . Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $a, b > 0$,atunci $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$.

Inegalitatea lui Bergström (forma extinsă). Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ şi $a_1, a_2, ..., a_n > 0$,atunci

(1) $\frac{x_1{}^2}{a_1}+\frac{x_2{}^2}{a_2}+....+\frac{x_n{}^2}{a_n} \geq \frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{a_1+a_2+...+a_n}$.

Observație. Inegalitatea lui Bergström este echivalentă cu inegalitatea lui Cauchy-Schwarz,adică cu inegalitatea:

(2) $\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right) \geq (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$, unde $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in R$.

Demonstrație:

Necesitatea:

Cazul I($a_i \neq 0, (\forall) i \in \{1, 2, ..., n\}$).Dacă înlocuim în inegalitatea (1) a_i cu $a_i{}^2$ şi x_i cu $|a_ib_i|$,pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ obținem:

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right) \geq \left(|a_1b_1|+|a_2b_2|+...+|a_nb_n|\right)^2 \geq (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$$

.

Cazul II($a_i \neq 0, (\forall) i \in I \subset \{1, 2, ..., n\} = J$).În acest caz avem: $\left(\sum_{i\in I} a_i{}^2\right)\left(\sum_{i\in I} b_i{}^2\right) \geq \left(\sum_{i\in I} a_ib_i\right)^2 \Rightarrow \left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right) =$

$$\left(\sum_{i\in I} a_i{}^2\right)\left(\sum_{i\in J} b_i{}^2\right) \geq \left(\sum_{i\in I} a_i{}^2\right)\left(\sum_{i\in I} b_i{}^2\right) \geq \left(\sum_{i\in I} a_ib_i\right)^2 = \left(\sum_{i\in J} a_ib_i\right)^2 .$$

Suficiența:

Se înlocuieşte în inegalitatea (2) a_i cu $\sqrt{a_i}$ şi b_i cu $\frac{x_i}{\sqrt{a_i}}$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ obținând inegalitatea (1).

În cele ce urmează vom da câteva rafinări ale inegalităților de mai sus urmate de aplicații.

Teorema1

(3) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ şi $a, b > 0$,avem $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} = \frac{(x+y)^2}{a+b}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2$.

Demonstrație:

Înmulțind ambii membri ai egalității din enunț cu $a+b$ aceasta devine:

$$(a+b)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\right)=(x+y)^2+ab\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+\frac{a}{b}y^2+\frac{b}{a}x^2+y^2=x^2+2xy+y^2+\frac{(bx-ay)^2}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}y^2+\frac{b}{a}x^2-2xy=\frac{(bx-ay)^2}{ab} \Leftrightarrow \frac{a^2y^2+b^2x^2-2xyab}{ab}=\frac{(bx-ay)^2}{ab}$$ (egalitate adevărată).

Teorema2

(4) Pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$ şi $a,b,c>0$,avem

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}+\frac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}}\left(\frac{x+y}{a+b}-\frac{z}{c}\right)^2+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2 .$$

Demonstrație:

Folosind succesiv identitatea (3) obținem:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=\frac{(x+y)^2}{a+b}+\frac{z^2}{c}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}+\frac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}}\left(\frac{x+y}{a+b}-\frac{z}{c}\right)^2$$

$$+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2$$

.

Teorema3

Pentru orice $x_1,x_2,....,x_n\in\mathbb{R}$ şi $a_1,a_2,....,a_n>0$,are loc egalitatea:

(4)

$$\frac{x_1{}^2}{a_1}+\frac{x_2{}^2}{a_2}+....+\frac{x_n{}^2}{a_n}=\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{a_1+a_2+...+a_n}+\frac{1}{\frac{1}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}}\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}-\frac{x_n}{a_n}\right)^2+$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1+a_2+...+a_{n-2}}+\frac{1}{a_{n-1}}}\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{n-2}}{a_1+a_2+...+a_{n-2}}-\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}\right)^2+...+\frac{1}{\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_3}}\left(\frac{x_1+x_2}{a_1+a_2}-\frac{x_3}{a_3}\right)^2+$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}\left(\frac{x_1}{a_1}-\frac{x_2}{a_2}\right)^2$$

Demonstrație:

Notăm $y_n=\frac{x_1{}^2}{a_1}+\frac{x_2{}^2}{a_2}+....+\frac{x_n{}^2}{a_n}-\frac{\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2}{a_1+a_2+...+a_n}$ și

$z_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\frac{1}{a_1+a_2+...+a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}}\left(\frac{x_1+x_2+...+x_k}{a_1+a_2+...+a_k}-\frac{x_{k+1}}{a_{k+1}}\right)^2$.

Egalitatea din enunț se scrie: $y_n=z_n$ .Vom demonstra această egalitate prin inducție matematică.Fie $P(n): y_n=z_n$. Evident $P(2)$ este adevărată (rezută din teorema 1).Dacă $P(n-1)$ este adevărată,atunci cum $y_n=\frac{x_1{}^2}{a_1}+\frac{x_2{}^2}{a_2}+....+\frac{x_n{}^2}{a_n}-\frac{\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2}{a_1+a_2+...+a_n}$

$=\frac{x_1{}^2}{a_1}+\frac{x_2{}^2}{a_2}+....+\frac{x_{n-1}{}^2}{a_{n-1}}-\frac{\left(x_1+x_2+...+x_{n-1}\right)^2}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}+\frac{\left(x_1+x_2+...+x_{n-1}\right)^2}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}+\frac{x_n{}^2}{a_n}-\frac{\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2}{a_1+a_2+...+a_n}=$

$y_{n-1}+\frac{\left(x_1+x_2+...+x_{n-1}\right)^2}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}+\frac{x_n{}^2}{a_n}-\frac{\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2}{a_1+a_2+...+a_n}=y_{n-1}+\frac{1}{\frac{1}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}}\cdot$

$\cdot\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}-\frac{x_n}{a_n}\right)^2=z_{n-1}+\frac{1}{\frac{1}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}}\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{a_1+a_2+...+a_{n-1}}-\frac{x_n}{a_n}\right)^2$

$\Rightarrow y_n=z_n$ .Conform principiului inducției matematice $P(n)$ este adevărată pentru orice $n\geq 2$.

Teorema4

a)Pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ și $a,b>0$,avem

$\frac{(x+y)^2}{a+b}+\frac{\max(a,b)}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2\geq\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\geq\frac{(x+y)^2}{a+b}+\frac{\min(a,b)}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2$.

b) Pentru orice $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ și $a_1,a_2,a_3>0$,avem

$\frac{x_1{}^2}{a_1}+\frac{x_2{}^2}{a_2}+\frac{x_3{}^2}{a_3}\geq\frac{\left(x_1+x_2+x_3\right)^2}{a_1+a_2+a_3}+$

$+\max\left(\max_{i\in\{1,2,3\}}\frac{1}{\frac{1}{a_1+a_2+a_3-a_i}+\frac{1}{a_i}}\left(\frac{x_1+x_2+x_3-x_i}{a_1+a_2+a_3-a_i}-\frac{x_i}{a_i}\right)^2,\ \max_{\substack{p,q\in\{1,2,3\}\\p\neq q}}\frac{1}{\frac{1}{a_p}+\frac{1}{a_q}}\left(\frac{x_p}{a_p}-\frac{x_q}{a_q}\right)^2\right)$

.

c) $\frac{x_1{}^2}{a_1}+\frac{x_2{}^2}{a_2}+....+\frac{x_n{}^2}{a_n}\geq\frac{\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^2}{a_1+a_2+...+a_n}+\max_{\substack{j\notin I\\I\subset\{1,2,...,n\}}}\frac{1}{\frac{1}{\sum_{i\in I}a_i}+\frac{1}{a_j}}\left(\frac{\sum_{i\in I}x_i}{\sum_{i\in I}a_i}-\frac{x_j}{a_j}\right)^2$, pentru orice $x_1,x_2,....,x_n\in\mathbb{R}$ și $a_1,a_2,....,a_n>0$.

Demonstrație:

a)Rezultă uşor din Teorema 1;b) Rezultă uşor din Teorema 2;c) Rezultă uşor din Teorema 3.

Aplicații

A1. Arătați că pentru orice $a,b,c>0$ are loc inegalitatea: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}+\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}$.

Demonstrație:

Se aplică punctul b) din **Teorema 4** astfel:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{1^2}{c}\geq\frac{(1+1+1)^2}{a+b+c}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=\frac{9}{a+b+c}+\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}.$$

A2. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ .Arătați că $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=\frac{(x+y)^2}{5}+30$ dacă şi numai dacă $\left|\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right|=5$.

Demonstrație:

Se foloseşte **Teorema1** astfel:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=\frac{(x+y)^2}{2+3}+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2=\frac{(x+y)^2}{5}+\frac{6}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2\Leftrightarrow\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=\frac{(x+y)^2}{5}+$$

$\frac{6}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2$ de unde rezultă echivalența din enunț.

A3. Determinați $k\in\mathbb{R}$ pentru care are loc inegalitatea

$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{7}\leq\frac{(x+y)^2}{10}+k\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{7}\right)^2$ pentru orice $x,y\in R$.

Demonstrație:

Se foloseşte **Teorema1** astfel: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{7}=\frac{(x+y)^2}{10}+\frac{21}{10}\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{7}\right)^2$.Inegalitatea din enunț devine:

$\frac{21}{10}\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{7}\right)^2\leq k\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{7}\right)^2$ pentru orice $x,y\in R\Leftrightarrow k\geq 2,1$.

Bibliografie

[1] Ion Bursuc,Metode folosite în demonstrarea inegalităților,Creații Matematice seria B,nr 1/2006.

[2] Ovidiu Pop,About Bergsröm’s inequality,Journal of Mathematical Inequalities,nr 2/2009.

profesori C.N.I.”Spiru Haret”,str.Zorilor,nr. 17,Suceava